अध्याय 4

गणितीय आगमन का सिद्धांत

4.1 समग्र अवलोकन (Overview)

गणितीय आगम एक तकनीक (technique) है जिसका प्रयोग विविध प्रकार के गणितीय कथनों का सूत्रिकरण करने में किया जा सकता है, जो n के पदों में सूत्रबद्ध हों, जहाँ n एक धन पूर्णांक है।

4.1.1 *गणितीय आगमन का सिद्धांत (The principle of mathematical induction)*

मान लीजिए कि प्राकृत संख्या n (धन पूर्णांक) से संबद्ध, P(n) एक प्रदत्त कथन इस प्रकार है कि,

(i) $n = 1$ के लिए कथन सत्य है, अर्थात्, P(1) सत्य है। (अथवा कथन किसी निश्चित प्राकृत संख्या के लिए सत्य है) और

(ii) यदि कथन $n = k$ के लिए सत्य है, तो कथन $n = k + 1$ के लिए भी सत्य है (जहाँ k एक विशेष किन्तु स्वेच्छ प्राकृत संख्या है), तो कथन P(n), सभी प्राकृत संख्याओं के लिए सत्य है।

4.2 हल किए हुए उदाहरण

संक्षिप्त (लघु) उत्तरीय प्रश्न

गणितीय आगमन के सिद्धांत का प्रयोग करके, उदाहरण 1 से 5 तक में दिए कथनों को सिद्ध कीजिए ($n \in \mathbf{N}$)

उदाहरण 1 $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$

हल मान लीजिए कि दिया कथन P(n) है। अत: $P(n) : 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$, सभी $n \in \mathbf{N}$ के लिए,
नोट कीजिए कि P(1) सत्य है, क्योंकि

$$P(1) : 1 = 1^2$$

मान लीजिए कि किसी $k \in \mathbf{N}$ के लिए P(k) सत्य है, अर्थात,

$$P(k) : 1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) = k^2$$

अब, P(k + 1) को सत्य सिद्ध करने के लिए, हम देखते हैं कि,

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + (2k + 1)$$
$$= k^2 + (2k + 1) \quad \text{(क्यों?)}$$
$$= k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$$

अत: जब कभी P(k) सत्य है तब, P(k +1) भी सत्य है

अतएव गणितीय आगमन के सिद्धांत द्वारा P(n), सभी $n \in \mathbf{N}$ के लिए सत्य है।

उदाहरण 2 सभी प्राकृत संख्याओं $n \geq 2$ के लिए सिद्ध कीजिए कि $\sum_{t=1}^{n-1} t(t+1) = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}$

हल मान लीजिए कि सभी प्राकृत संख्याओं $n \geq 2$ के लिए कथन P(n) निम्नवत प्रदत्त है। अर्थात्

$$P(n): \sum_{t=1}^{n-1} t(t+1) = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}$$ सभी प्राकृत संख्याओं $n \geq 2$ के लिए।

हम देखते हैं कि,

$$P(2): \sum_{t=1}^{2-1} t(t+1) = \sum_{t=1}^{1} t(t+1) = 1.2 = \frac{1.2.3}{3}$$

$$= \frac{2.(2-1)(2+1)}{3}$$

अतएव P(n), $n = 2$ के लिए सत्य है।

मान लीजिए कि किसी $n = k \in \mathbf{N}$ के लिए P(n) सत्य है।

अर्थात् $$P(k): \sum_{t=1}^{k-1} t(t+1) = \frac{k(k-1)(k+1)}{3}$$

अब P(k + 1) का सत्य सिद्ध करने के लिए, हम देखते हैं कि

$$\sum_{t=1}^{(k+1-1)} t(t+1) = \sum_{t=1}^{k} t(t+1)$$

$$= \sum_{t=1}^{k-1} t(t+1) + k(k+1) = \frac{k(k-1)(k+1)}{3} + k(k+1)$$

$$= k(k+1)\left[\frac{k-1+3}{3}\right] = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

$$= \frac{(k+1)((k+1)-1))((k+1)+1)}{3}$$

अतएव जब कभी P(k) सत्य है, P(k + 1) भी सत्य है।

अत: गणितीय आगमन के सिद्धांत से सभी प्राकृत संख्याओं $n \geq 2$ के लिए, P(n) सत्य है।

उदाहरण 3 सभी प्राकृत संख्याओं $n \geq 2$ के लिए, $\left(1-\frac{1}{2^2}\right).\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$

हल मान लीजिए कि प्रदत्त कथन P(n) है, अर्थात् सभी प्राकृत संख्या $n \geq 2$ के लिए,

$$P(n) : \left(1-\frac{1}{2^2}\right).\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$$

हम देखते हैं कि P(2) सत्य है, क्योंकि

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)=1-\frac{1}{4} = \frac{4-1}{4}=\frac{3}{4}=\frac{2+1}{2\times 2}$$

मान लीजिए कि किसी $k \in \mathbf{N}$ के लिए P(n) सत्य है, अर्थात्,

$$P(k) : \quad 1-\frac{1}{2^2} \;.\; 1-\frac{1}{3^2} \;...\; 1-\frac{1}{k^2} = \frac{k+1}{2k}$$

अब P (k + 1) को सत्य सिद्ध करने के लिए हम देखते हैं कि,

$$1-\frac{1}{2^2} \;.\; 1-\frac{1}{3^2} \;...\; 1-\frac{1}{k^2} \;.\; 1-\frac{1}{(k+1)^2}$$

$$=\frac{k+1}{2k}\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=\frac{k^2+2k}{2k\,(k+1)}=\frac{(k+1)+1}{2\,(k+1)}$$

अतएव जब कभी P (k) सत्य है P(k +1) भी सत्य है।

अत: गणितीय आगमन के सिद्धांत से सभी प्राकृत संख्याओं $n \geq 2$ के लिए, P(n) सत्य है।

उदाहरण 4 $2^{2n} - 1$ संख्या 3 से भाज्य है।

हल मान लीजिए कि प्रदत्त कथन P(n) है अर्थात् P(n) : $2^{2n} - 1$, संख्या 3 से भाज्य है (सभी प्राकृत संख्या n के लिए) हम देखते हैं कि, P(1) सत्य है, क्योंकि

$2^2 - 1 = 4 - 1 = 3.1$ जो संख्या 3 से भाज्य है।

मान लीजिए कि किसी प्राकृत संख्या k के लिए P(n) सत्य है, अर्थात्

P(k): $2^{2k} - 1$ संख्या 3 से भाज्य है, अर्थात् $2^{2k} - 1 = 3q$, जहाँ $q \in \mathbf{N}$ अब P(k + 1) को सत्य सिद्ध करने के लिए हम देखते हैं कि,

$$P(k+1) : 2^{2(k+1)} - 1 = 2^{2k+2} - 1 = 2^{2k} . 2^2 - 1$$

$$= 2^{2k} . 4 - 1 = 3.2^{2k} + (2^{2k} - 1)$$

$= 3.2^{2k} + 3q$

$= 3\ (2^{2k} + q) = 3m$, जहाँ $m \in \mathbf{N}$

अतएव, जब कभी P(k) सत्य है, P(k +1) भी सत्य है।

अत: गणितीय आगमन के सिद्धांत से, सभी प्राकृत संख्याओं n के लिए, P(n) सत्य है।

उदाहरण 5 सभी प्राकृत संख्याओं $n \geq 3$ के लिए $2n + 1 < 2^n$.

हल मान लीजिए कि P(n) प्रदत्त कथन है, अर्थात् सभी प्राकृत संख्याओं $n \geq 3$ के लिए

P(n) : $(2n + 1) < 2^n$ हम देखते हैं कि P(3) सत्य है, क्योंकि

$$2.3 + 1 = 7 < 8 = 2^3$$

मान लीजिए कि किसी प्राकृत संख्या k के लिए P(n) सत्य है, अर्थात् $2k + 1 < 2^k$

P(k + 1) को सत्य सिद्ध करने के लिए, हमें सिद्ध करना है कि $2(k + 1) + 1 < 2^{k+1}$

अब, $\quad 2(k + 1) + 1 = 2k + 3$

$= 2k + 1 + 2 < 2^k + 2 < 2^k\ .\ 2 = 2^{k+1}$.

अतएव जब कभी P(k) सत्य है, P(k +1) भी सत्य है।

अत:, सभी प्राकृत संख्याओं $n \geq 3$ के लिए, गणितीय आगमन के सिद्धांत द्वारा P(n) सत्य है।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (L.A)

उदारहण 6 किसी अनुक्रम a_1, a_2, a_3... को इस प्रकार परिभाषित कीजिए कि $a_1 = 2, a_n = 5\ a_{n-1}$. जो सभी प्राकृत संख्याओं $n \geq 2$ के लिए,

(i) अनुक्रम के प्रथम चार पद (terms) लिखिए।

(ii) गणितीय आगमन के सिद्धांत का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि सभी प्राकृत संख्याओं के लिए, अनुक्रम के पद, सूत्र $a_n = 2.5^{n-1}$ को संतुष्ट करते हैं।

हल

(i) हम देखते हैं कि, $a_1 = 2$

$a_2 = 5a_{2-1} = 5a_1 = 5.2 = 10$

$a_3 = 5a_{3-1} = 5a_2 = 5.10 = 50$

$a_4 = 5a_{4-1} = 5a_3 = 5.50 = 250$

(ii) मान लीजिए कि प्रदत्त कथन P(n) है, अर्थात्, सभी प्राकृत संख्याओं के लिए

P(n) : $a_n = 2.5^{\,n-1}$ हम देखते हैं कि, P(1) सत्य है।

मान लीजिए कि किसी प्राकृत संख्या k के लिए P(n) सत्य है, अर्थात् P(k) : $a_k = 2.5^{k-1}$.

अब P (k + 1) को सत्य सिद्ध करने के लिए हम देखते हैं कि,

$$P(k+1) : a_{k+1} = 5.a_k = 5 \,.\, (2.5^{k-1})$$
$$= 2.5^k = 2.5^{(k+1)-1}$$

अतएव, जब कभी P(k) सत्य है, P (k + 1) सभी सत्य है।

अतः, गणितीय आगमन के सिद्धांत द्वारा, सभी प्राकृत संख्याओं के लिए, P(n) सत्य है।

उदाहरण 7 बीजगणित (algebra) के वितरण नियम द्वारा सभी वास्तविक संख्याओं c, a_1 और a_2 के लिए, $c\ (a_1 + a_2) = ca_1 + ca_2$.

इस वितरण नियम तथा गणितीय आगमन का प्रयोग करके, सिद्ध कीजिए कि, सभी प्राकृत संख्याओं $n \geq 2$, के लिए, यदि $c, a_1, a_2, ..., a_n$ वास्तविक संख्याएँ हैं, तो

$$c\ (a_1 + a_2 + ... + a_n) = ca_1 + ca_2 + ... + ca_n$$

हल मान लीजिए कि P(n) प्रदत्त कथन है, अर्थात् सभी प्राकृत संख्याओं $n \geq 2$ के लिए यदि $c, a_1, a_2, ...a_n \in$ R, तो P(n) : $c\ (a_1 + a_2 + ... + a_n) = ca_1 + ca_2 + ... ca_n$.

हम देखते हैं कि P(2) सत्य है, क्योंकि,

$$c(a_1 + a_2) = ca_1 + ca_2 \qquad \text{(वितरण नियम द्वारा)}$$

मान लीजिए कि किसी-किसी प्राकृत संख्या k के लिए P(n) सत्य है, जहाँ $k > 2$, अर्थात्,

$$P(k) : c\ (a_1 + a_2 + ... + a_k) = ca_1 + ca_2 + ... + ca_k$$

अब P(k + 1) को सत्य सिद्ध करने के लिए, हम देखते हैं कि,

$$P(k+1) : c\ (a_1 + a_2 + ... + a_k + a_{k+1})$$
$$= c\ ((a_1 + a_2 + ... + a_k) + a_{k+1})$$
$$= c\ (a_1 + a_2 + ... + a_k) + ca_{k+1} \qquad \text{(वितरण नियम द्वारा)}$$
$$= ca_1 + ca_2 + ... + ca_k + ca_{k+1}$$

अतएव जब कभी P(k) सत्य है, P (k + 1) भी सत्य है।

अतः गणितीय आगमन के सिद्धांत द्वारा, P(n) सभी प्राकृत संख्याओं $n \geq 2$ के लिए सत्य है।

उदाहरण 8 आगमन विधि द्वारा सिद्ध कीजिए कि सभी प्राकृत संख्याओं n के लिए,

$\sin \alpha + \sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha + 2\beta) + ... + \sin (\alpha + (n-1)\beta)$

$$= \frac{\sin\left(\alpha + \frac{n-1}{2}\beta\right)\sin\left(\frac{n\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

हल मान लीजिए कि सभी प्राकृत संख्याओं n के लिए, P (n) : $\sin \alpha + \sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha + 2\beta) + ... + \sin (\alpha + (n-1)\beta)$

$$= \frac{\sin\left(\alpha + \frac{n-1}{2}\beta\right)\sin\left(\frac{n\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}.$$

हम देखते हैं कि P (1) सत्य है, क्योंकि

$$P(1) : \sin\alpha = \frac{\sin(\alpha+0)\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

मान लीजिए कि किसी प्राकृत संख्या k के लिए P(n) सत्य है, अर्थात्,
$P(k) : \sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+2\beta) + ... + \sin(\alpha+(k-1)\beta)$

$$= \frac{\sin\left(\alpha + \frac{k-1}{2}\beta\right)\sin\left(\frac{k\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

अब P (k + 1) को सत्य सिद्ध करने के लिए, हम देखते हैं कि,
$P(k+1) : \sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+2\beta) + ... + \sin(\alpha+(k-1)\beta) + \sin(\alpha+k\beta)$

$$= \frac{\sin\left(\alpha + \frac{k-1}{2}\beta\right)\sin\left(\frac{k\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)} + \sin(\alpha+k\beta)$$

$$= \frac{\sin\left(\alpha + \frac{k-1}{2}\beta\right)\sin\frac{k\beta}{2} + \sin(\alpha+k\beta)\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$= \frac{\cos\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) - \cos\left(\alpha + k\beta - \frac{\beta}{2}\right) + \cos\left(\alpha + k\beta - \frac{\beta}{2}\right) - \cos\left(\alpha + k\beta + \frac{\beta}{2}\right)}{2\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$= \frac{\cos\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) - \cos\left(\alpha + k\beta + \frac{\beta}{2}\right)}{2\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$= \frac{\sin\left(\alpha + \frac{k\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{k\beta + \beta}{2}\right)}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$= \frac{\sin\left(\alpha + \frac{k\beta}{2}\right)\sin\,(k+1)\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

अतएव, जब कभी P (k) सत्य है, P (k + 1) भी सत्य है।

अत: गणितीय आगमन के सिद्धांत द्वारा, सभी प्राकृत संख्या n के लिए P(n) सत्य है।

उदाहरण 9 गणितीय आगमन के सिद्धान्त द्वारा सिद्ध कीजिए कि सभी प्राकृत संख्या n के लिए, $1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + ... + n \times n! = (n + 1)! - 1$

हल मान लीजिए कि P(n) प्रदत्त कथन है, अर्थात्, सभी प्राकृत संख्याओं n के लिए

$P(n) : 1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + ... + n \times n! = (n + 1)! - 1$

ध्यान दीजिए कि P(1) सत्य है, क्योंकि

$$P(1) : 1 \times 1! = 1 = 2 - 1 = 2! - 1.$$

मान लीजिए कि किसी प्राकृत संख्या k के लिए P(n) सत्य है, अर्थात्,

$P(k) : 1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + ... + k \times k! = (k + 1)! - 1$

P (k + 1) को सत्य सिद्ध करने के लिए हम देखते हैं कि,

$P(k + 1) : 1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + ... + k \times k! + (k + 1) \times (k + 1)!$

$$= (k + 1)! - 1 + (k + 1)! \times (k + 1)$$

$$= (k + 1 + 1)\ (k + 1)! - 1$$

$$= (k + 2)\ (k + 1)! - 1 = ((k + 2)! - 1$$

अतएव, जब कभी P (k) सत्य है P (k + 1) भी सत्य है। इसलिए, गणितीय आगमन के सिद्धान्त द्वारा सभी प्राकृत संख्याओं n के लिए, P (n) सत्य है।

उदारहण 10 गणितीय आगमन के सिद्धांत द्वारा सिद्ध कीजिए कि श्रेणी (series), $1^2 + 2 \times 2^2 + 3^2 + 2 \times 4^2 + 5^2 + 2 \times 6^2$ ... के n पदों का योगफल S_n, निम्नलिखित प्रकार है,

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{n(n+1)^2}{2}, & \text{यदि } n \text{ सम है} \\ \dfrac{n^2(n+1)}{2}, & \text{यदि } n \text{ विषम है} \end{cases}$$

हल यहाँ $P(n) : S_n = \begin{cases} \dfrac{n(n+1)^2}{2}, & \text{यदि } n \text{ सम है} \\ \dfrac{n^2(n+1)}{2}, & \text{यदि } n \text{ विषम है} \end{cases}$

साथ ही ध्यान दीजिए कि श्रेणी का कोई पद T_n निम्नलिखित प्रकार है,

$$T_n = \begin{cases} n^2 & \text{यदि } n \text{ विषम है।} \\ 2n^2 & \text{यदि } n \text{ सम है।} \end{cases}$$

हम देखते हैं कि P(1) सत्य है, क्योंकि,

$$P(1) : S_1 = 1^2 = 1 = \frac{1.2}{2} = \frac{1^2.(1+1)}{2}$$

मान लीजिए कि किसी प्राकृत संख्या k के लिए $P(k)$ सत्य है, अर्थात्,

दशा 1 जब k विषम है, तो $k + 1$ सम है। इस प्रकार

$P(k + 1) : S_{k+1} = [1^2 + 2 \times 2^2 + ... + k^2] + 2 \times (k + 1)^2$

$$= \frac{k^2(k+1)}{2} + 2 \times (k+1)^2$$

$$= \frac{(k+1)}{2}[k^2 + 4(k+1)] \text{ (क्योंकि } k \text{ विषम है, } 1^2 + 2 \times 2^2 + ... + k^2 = k^2 \frac{(k+1)}{2})$$

$$= \frac{k+1}{2}[k^2 + 4k + 4]$$

$$= \frac{k+1}{2}(k+2)^2 = (k+1)\frac{[(k+1)+1]^2}{2}$$

अतएव, उस दशा में, जब k विषम है, $P(k + 1)$ सत्य है, जब कभी $P(k)$ सत्य है।

दशा 2 जब k सम है, तो $k + 1$ विषम है।

अब $\quad P(k+1) : S_{k+1} = [1^2 + 2 \times 2^2 + ... + 2.k^2] + (k+1)^2$

$$= \frac{k(k+1)^2}{2} + (k+1)^2 \text{ क्योंकि } k \text{ सम है, } 1^2 + 2 \times 2^2 + ... + 2k^2 = k\,\frac{(k+1)^2}{2})$$

$$= \frac{(k+1)^2(k+2)}{2} = \frac{(k+1)^2((k+1)+1)}{2}$$

इसलिए उस दशा में, जब k सम है, P $(k+1)$ सत्य है, जब कभी P (k) सत्य है। अतएव सभी प्राकृत संख्याओं k के लिए, P $(k+1)$ सत्य है, जब कभी P (k) सत्य है।

अत: P (n) सभी प्राकृत संख्याओं n के लिए सत्य है।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

उदाहरण 11 और 12 में सही उत्तर का चयन कीजिए (M.C.Q.)

उदारहण 11 मान लीजिए कि P(n) : "$2^n < (1 \times 2 \times 3 \times ... \times n)$", तो न्यूनतम धन पूर्णांक, जिसके लिए P (n) सत्य है,

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 है।

हल सही उत्तर (D) है, क्योंकि

P (1) : $2 < 1$ असत्य है

P (2) : $2^2 < 1 \times 2$ असत्य है

P (3) : $2^3 < 1 \times 2 \times 3$ असत्य है

लेकिन P (4) : $2^4 < 1 \times 2 \times 3 \times 4$ सत्य है

उदारहण 12 एक विद्यार्थी को किसी कथन P (n) को गणितीय आगमन द्वारा सिद्ध करने के लिए कहा गया। उसने सिद्ध किया कि, सभी $k > 5 \in \mathbf{N}$ के लिए P $(k+1)$ सत्य है, जब कभी P (k) सत्य है और यह कि P (5) भी सत्य है। इसके आधार पर उसने निष्कर्ष निकाला कि P (n) सत्य है,

(A) सभी $n \in \mathbf{N}$ के लिए (B) सभी $n > 5$ के लिए

(C) सभी $n \geq 5$ के लिए (D) सभी $n < 5$ के लिए

हल सही उत्तर (C) है, क्योंकि P(5) सत्य है, तथा P$(k+1)$ सत्य है, जब कभी P (k) सत्य है।

उदाहरण 13 यदि P (n) : "$2.4^{2n+1} + 3^{3n+1}$ सभी $n \in \mathbf{N}$" के लिए, λ से भाज्य है, सत्य है, तो λ का मान ________ है।

हल अब $n = 1$ के लिए,

$2.4^{2+1} + 3^{3+1} = 2.4^3 + 3^4 = 2.64 + 81 = 128 + 81 = 209,$

$n = 2$ के लिए,

$2.4^5 + 3^7 = 8.256 + 2187 = 2048 + 2187 = 4235$

ध्यान दीजिए कि 209 तथा 4235 का म. स. व. (H.C.F.) 11 है। अतएव $2.4^{2n+1} + 3^{3n+1}$ का भाजक 11 है। अतः λ का मान 11 है।

उदाहरण 14 यदि P (*n*) : "$n \in \mathbf{N}$ के लिए, $49^n + 16^n + k$ संख्या 64 से भाज्य है" सत्य है, तो *k* का न्यूनतम ऋण पूर्णांक मान __________ है।

हल $n = 1$ के लिए, P(1) : 65 + *k*, 64 से भाज्य है, अतः $k = -1$,

क्योंकि 65 – 1 = 64, संख्या 64 से भाज्य है।

उदाहरण 15 बताइए कि गणितीय आगमन द्वारा कथन $P(n): 1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

की निम्नलिखित उपपत्ति सत्य है या असत्य है।

उपपत्ति गणितीय आगमन के सिद्धांत द्वारा $n = 1$ के लिए P(*n*) सत्य है, क्योंकि

$1^2 = 1 = \dfrac{1(1+1)(2\cdot1+1)}{6}$ पुनः किसी $k \geq 1$ के लिए $k^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

अब हम सिद्ध करेंगे कि $(k+1)^2 = \dfrac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}$

हलः यह उपपत्ति असत्य (ग़लत) है। क्योंकि आगमन चरण (Induction step) में आगमन परिकल्पना (Induction hypothesis) तथा जो सिद्ध किया जाना है, दोनों ही गलत (दोषपूर्ण हैं)।

4.3 प्रश्नावली

लघु उत्तरीय प्रश्न (S.A.)

1. एक ऐसे कथन P(*n*) का उदाहरण दीजिए, जो सभी $n \geq 4$ के लिए सत्य है किंतु P(1), P(2) तथा P(3) सत्य नहीं है। अपने उत्तर का औचित्य भी बताइए।
2. किसी ऐसे कथन P(*n*) का उदाहरण दीजिए जो *n* के सभी मानों के लिए सत्य है। अपने उत्तर का औचित्य बताइए।

गणितीय आगमन के सिद्धांत द्वारा प्रश्न संख्या 3 से 16 तक के कथनों में से प्रत्येक को सिद्ध कीजिए:

3. प्रत्येक प्राकृत संख्या *n* के लिए, $4^n - 1$ संख्या 3 से भाज्य है।
4. सभी प्राकृत संख्या *n* के लिए, $2^{3n} - 1$, संख्या 7 से भाज्य है।
5. सभी प्राकृत संख्या *n* के लिए, $n^3 - 7n + 3$, संख्या 3 भाज्य है।
6. सभी प्राकृत संख्या *n* के लिए $3^{2n} - 1$ संख्या 8 से भाज्य है।
7. किसी प्राकृत संख्या *n* के लिए $7^n - 2^n$ संख्या 5 से भाज्य है।

8. किसी प्राकृत संख्या n के लिए, $x^n - y^n$, $x - y$ से भाज्य है, जहाँ x तथा y पूर्णांक है और $x \neq y$.

9. प्रत्येक प्राकृत संख्या $n \geq 2$ के लिए, $n^3 - n$, संख्या 6 से भाज्य है।

10. प्रत्येक प्राकृत संख्या n के लिए, $n(n^2 + 5)$, संख्या 6 से भाज्य है।

11. सभी प्राकृत संख्या $n \geq 5$ के लिए, $n^2 < 2^n$.

12. सभी प्राकृत संख्या n के लिए, $2n < (n + 2)!$

13. सभी प्राकृत संख्या $n \geq 2$ के लिए, $\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$

14. सभी प्राकृत संख्या n के लिए, $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n^2 + n$.

15. सभी प्राकृत संख्या n के लिए, $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

16. सभी प्राकृत संख्या n के लिए, $1 + 5 + 9 + \ldots + (4n - 3) = n(2n - 1)$

विस्तृत उत्तर वाले प्रश्न (L.A)

निम्नलिखित प्रश्नों में गणितीय आगमन के सिद्धांत का प्रयोग कीजिए:

17. सभी प्राकृत संख्या $k \geq 2$ के लिए, एक अनुक्रम $a_1, a_2, a_3 \ldots, a_1 = 3$ तथा $a_k = 7a_{k-1}$ द्वारा परिभाषित है। सिद्ध कीजिए कि सभी प्राकृत संख्या n के लिए $a_n = 3.7^{n-1}$.

18. सभी प्राकृत संख्या k के लिए एक अनुक्रम $b_0, b_1, b_2 \ldots, b_0 = 5$ तथा $b_k = 4 + b_{k-1}$ द्वारा परिभाषित है। गणितीय आगमन के प्रयोग द्वारा सिद्ध कीजिए कि सभी प्राकृत संख्या n के लिए $b_n = 5 + 4n$.

19. सभी प्राकृत संख्या $k \geq 2$ के लिए अनुक्रम $d_1, d_2, d_3 \ldots, d_1 = 2$ तथा $d_k = \frac{d_{k-1}}{k}$ द्वारा परिभाषित है। सिद्ध कीजिए कि सभी $n \in \mathrm{N}$ के लिए, $d_n = \frac{2}{n!}$

20. सभी $n \in \mathbf{N}$ के लिए, सिद्ध कीजिए कि,

$\cos\alpha + \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + 2\beta) + \ldots + \cos(\alpha + (n-1)\beta)$

$$= \frac{\cos\left(\alpha + \left(\frac{n-1}{2}\right)\beta\right)\sin\left(\frac{n\beta}{2}\right)}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

21. सभी $n \in \mathrm{N}$ के लिए, सिद्ध कीजिए कि, $\cos\theta\cos2\theta\cos2^2\theta \ldots \cos2^{n-1}\theta = \frac{\sin 2^n\theta}{2^n \sin\theta}$.

22. सभी $n \in \mathrm{N}$ के लिए, सिद्ध कीजिए कि, $\sin\theta + \sin2\theta + \sin3\theta + \ldots + \sin n\theta$

$$= \frac{\sin\frac{n\theta}{2}\sin\frac{(n+1)}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

23. सभी $n \in \mathbf{N}$ के लिए, सिद्ध कीजिए कि, $\frac{n^5}{5}+\frac{n^3}{3}+\frac{7n}{15}$ एक प्राकृत संख्या है।

24. सभी प्राकृत संख्या $n > 1$ के लिए सिद्ध कीजिए कि $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$.

25. सभी $n \in \mathbf{N}$ के लिए, सिद्ध कीजिए कि n भिन्न-भिन्न distinct अवयव वाले (अंतर्विष्ट किए हुए) समुच्चय के उपसमुच्चयों की संख्या 2^n है।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न संख्या 26 से 30 में सही उत्तर का चयन कीजिए (M.C.Q.).

26. यदि सभी $n \in \mathrm{N}$ के लिए, $10^n + 3.4^{n+2} + k$, संख्या 9 से भाज्य है, तो k का लघुतम पूर्णांक मान:

(A) 5 (B) 3 (C) 7 (D) 1

27. सभी $n \in \mathbf{N}$ के लिए, $3.5^{2n+1} + 2^{3n+1}$, निम्नलिखित में से किस संख्या से भाज्य है:

(A) 19 (B) 17 (C) 23 (D) 25

28. यदि $x^n - 1$, $x - k$, से भाज्य है, तो k का न्यूनतम पूर्णांक है:

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

निम्नलिखित प्रश्न में रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए:

29. यदि $P(n) : 2n < n!$, $n \in \mathbf{N}$, तो $P(n)$ सभी $n \geq$ ________ के लिए सत्य है।

बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य है या असत्य है। औचित्य भी बताइए:

30. मान लीजिए कि $P(n)$ एक कथन है और मान लीजिए कि किसी प्राकृत संख्या k के लिए $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$, तो $P(n)$ सभी $n \in \mathbf{N}$ के लिए सत्य है।